

exemplo: partícula num potencial central

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - V(r)$$

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad ; \quad p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta} \quad ; \quad p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}$$

$$\rightarrow \boxed{\dot{r} = \frac{p_r}{m} \quad ; \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \quad ; \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2 \sin^2 \theta}} \quad (*)$$

$$\rightarrow H = \dot{r} p_r + \dot{\theta} p_\theta + \dot{\varphi} p_\varphi - \mathcal{L} = \boxed{\frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{2m \sin^2 \theta r^2} + V(r)}$$

eqs. de Hamilton: as 3 acima (*) mais:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{p}_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{1}{mr^3} \left[p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} \right] - \frac{\partial V}{\partial r} \\ \dot{p}_\theta &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\varphi^2}{mr^2} \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} \quad \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \end{aligned}}$$

Obs: resolver essas eqs. não é, em geral, mais fácil do que resolver as eqs.

de Lagrange originais. De fato, no caso acima a forma mais direta é substituir as eqs. p/ $\dot{r}$ nas eqs p/ $\ddot{r}$, recuperando as eqs. de Lagrange! O objetivo da formulação Hamiltoniana não é esse, mas sim fornecer uma visão mais profunda da estrutura do sistema mecânico. Mesmo assim, veremos mais adiante que existem sim métodos derivados a partir da formulação Hamiltoniana que permitem sim acelerar a solução em muitos casos. A M.H. é também o ponto de partida conceitual p/ a M.R. e M.Est.

Uma outra diferença fundamental entre as formulações Lagrangeana e Hamiltoniana é que, ao contrário de L , H possui significado físico direto. Por definição, H é nada mais que a integral de Jacobi h , escrita em termos de q e p ao invés de q e $\dot{q}$! Em particular, nos casos em que $L = T - V(r)$, com T função puramente quadrática das velocidades $\dot{q}$, então $H = T + V = E_{\text{TOT}}$, ie, a Hamiltoniana é a energia total, escrita em função de q e p .

Vimos anteriormente que se L não depende explicitamente de t , h é conservado. O mesmo então tem de valer p/ H , como podemos checar diretamente:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial t} = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t}$$

$\therefore$ se $H(\leftrightarrow L)$ não depende explicitamente de t , então é conservado.

Nota: isso pode valer ou não independente de H ser ou não a energia total!

As demais leis de conservação também podem ser expressas em termos de H : (exercício)

coords cartesianas

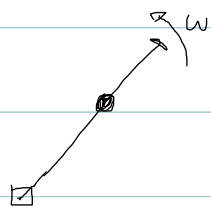
- se $H(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N)$ é invariante por translações infinitesimais $\delta \vec{r}_k = \epsilon \hat{n}$,

então $\frac{d}{dt} \vec{P} \cdot \hat{n} = 0$, $\vec{P} = \sum_k \vec{p}_k$

- Se H é invariante por rotações infinitesimais $\delta \vec{r}_k = \delta \theta \hat{n} \times \vec{r}_k$; $\delta \vec{p}_k = \delta \theta \hat{n} \times \vec{p}_k$

então $\frac{d}{dt} \vec{L} \cdot \hat{n} = 0$, $\vec{L} = \sum_k \vec{r}_k \times \vec{p}_k$

exemplo com $H \neq E_{\text{TOT}}$: conta numa haste reta girando c/ vel. angular ω



$$L = T = \frac{m}{2} [\dot{r}^2 + \omega^2 r^2] = E_{\text{TOT}} \rightarrow p_r = m\dot{r}$$

$$\Rightarrow H = \frac{p_r^2}{2m} - \frac{m\omega^2 r^2}{2} \neq E_{\text{TOT}}$$

como $\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \rightarrow H$ é conservado (mas E_{TOT} não!)

motivo: a força de vínculo exercida pela haste realiza trabalho à medida em que a partícula se desloca
(alternativamente: o vínculo $\theta = \omega t \leftrightarrow \theta = \theta_0 + \omega t$ é dependente do tempo explicitamente)

obs: no referencial não-inercial girando com vel. ang. ω : o movimento é 1-dimensional (des. só de r) e a Lagrangiana é (v. ex. 3.10):

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 + 2\vec{v} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}))$$

e como $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$ e $\vec{v} = \dot{r} \hat{r}$: $(\vec{\omega} \times \vec{r})^2 = \omega^2 r^2$; $\vec{v} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) = 0$

$\Rightarrow L = \frac{m}{2} [\dot{r}^2 + \omega^2 r^2]$ novamente, só que agora $\frac{m r^2 \omega^2}{2} = -V_{\text{centrífugo}}$. Assim

$$E_{\text{TOT}} \equiv T + V = \frac{m \dot{r}^2}{2} - \frac{m \omega^2 r^2}{2} = H$$

exemplo: partícula num campo EM externo (possivelmente dep. do tempo)

$$L = \frac{m}{2} \sum_i \dot{x}_i^2 - e\phi(\vec{r}, t) + \frac{e}{c} \vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) \quad \therefore p_i = m\dot{x}_i + \frac{e}{c} A_i$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{x}_i = \frac{1}{m} \left[p_i - \frac{e}{c} A_i \right]} \quad \left(\vec{v} = \frac{1}{m} \left[\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right] \right)$$

$$e \quad H = \sum_i \left[\dot{x}_i \left(m\dot{x}_i + \cancel{\frac{e}{c} A_i} \right) - \frac{m}{2} \dot{x}_i^2 - \cancel{\frac{e}{c} \dot{x}_i A_i} \right] + e\phi$$

$$H = \frac{1}{2m} \sum_i \left[p_i - \frac{e}{c} A_i \right]^2 + e\phi = \boxed{\frac{1}{2m} \left[\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right]^2 + e\phi}$$

Se ϕ, A não dependem explicitamente de t (campos $\vec{E}, \vec{B}$ estáticos) então H é conservado. Podemos tb interpretar H como a energia total (cinética + eletrostática), já que o campo $\vec{B}$ estático não realiza trabalho. Note que isto é verdade mesmo com o potencial (generalizado) em L dependendo de $\vec{v}$.

observe que não podemos interpretar H como energia cinética mais a (energia) potencial generalizada $U(\vec{r}, \vec{v})$ usada na Lagrangeana

observações:

i) H não é invariante por transformações de Calibre. Se

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} ; \vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \Lambda \quad \text{para algum } \Lambda(\vec{r}, t), \text{ então}$$

$$H \rightarrow H' = H - \frac{e}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad (\text{note que } \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} = m\vec{v} \text{ (ind. de } \phi, \vec{A}))$$

Assim, mesmo se $\vec{E}, \vec{B}$ forem estáticos, é possível escolher calibres em que

ϕ, A dependem de t , e portanto também H ! Nesse caso $\frac{\partial H}{\partial t} \neq 0$ e H não é conservado! Claro que as eqs. de Hamilton continuam levando às mesmas eqs. de movimento (v. abaixo)

ii) De modo geral, a definição do que, exatamente, deve ser chamado de "energia", e quando essa quantidade equivale ou não ao Hamiltoniano, não é um problema trivial, particularmente qdo os campos não são estáticos. Também não é sempre consistente assumir que a partícula (carregada) se move num campo externo dado, desprezando o fato de que ela própria gera e modifica o campo (p. ex., irradia se acelerada). Para mais discussão, v. artigos de D. Kobe, Am J. Phys. 49 (6) p581 (1981)

D. Kobe e K.H. Yang, Eur. J. Phys. 8 p236 (1987)

eqs. de Hamilton: $\boxed{\vec{r} = \frac{1}{m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)}$ e

$$\dot{\vec{p}} = -\nabla H = -e \nabla \phi - \frac{1}{2m} \vec{\nabla} \left[\left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \cdot \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \right]$$

mas: $\nabla [\vec{a} \cdot \vec{a}] = 2(\vec{a} \cdot \nabla) \vec{a} + 2\vec{a} \times (\nabla \times \vec{a})$ (v. abaixo) (*)

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\vec{p}} = -e \nabla \phi + \frac{e}{mc} \left[\left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \cdot \nabla \right] \vec{A} + \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \times (\nabla \times \vec{A})}$$

em particular, substituindo acima: $m \ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{p}} - \frac{e}{c} \dot{\vec{A}} = -e \nabla \phi + \frac{e}{c} (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{A} + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}) - \frac{e}{c} \frac{d\vec{A}}{dt}$

mas: $\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_i} v_i = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{A}$; $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$; $\vec{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

$$\Rightarrow \boxed{m \ddot{\vec{r}} = e \vec{E} + \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{B}} \quad (F_{\text{e}} \text{ de Lorentz} - \text{OK})$$

(*) check: $\nabla \sum_i a_i^2 = \sum_i \nabla (a_i^2) = \sum_{ij} \frac{\partial (a_i^2)}{\partial x_j} \hat{e}_j = \sum_{ij} 2a_i \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \hat{e}_j$

$$(\vec{a} \cdot \nabla) \vec{a} = \sum_{ij} a_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \hat{e}_j; \quad \vec{a} \times (\nabla \times \vec{a}) = \sum_{ijk} a_i (\nabla \times \vec{a})_j \epsilon_{ijk} \hat{e}_k = \sum_{ijk} a_i \epsilon_{ijk} \frac{\partial a_n}{\partial x_m} \epsilon_{mnj} \hat{e}_k$$

como: $\sum_j \epsilon_{kij} \epsilon_{mnj} = \delta_{km} \delta_{in} - \delta_{kn} \delta_{im}$

então $\vec{a} \times (\nabla \times \vec{a}) = \sum_{ik} \left(a_i \frac{\partial a_i}{\partial x_k} - a_i \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \right) \hat{e}_k = \nabla (\vec{a} \cdot \vec{a}) - (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{a}$

Obtenção das eqs. de Hamilton de um princípio variacional

Vimos que as eqs. de Lagrange podem ser obtidas a partir do princípio de Hamilton

$$0 = \delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt, \text{ com variação tomada sobre todas as curvas com } t_i = t_1, t_f = t_2, \text{ e } \delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$$

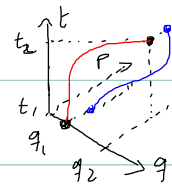
O mesmo princípio leva às eqs de Hamilton, se o integrando for visto como função de q, p, t , e as variações vistas como ocorrendo sobre trajetórias no espaço de fase, com as mesmas condições de bordo.

(sendo ainda os δp_i 's tomados independente dos δq_i 's):

$$0 = \delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_i p_i \dot{q}_i - H(p, q, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left(p_i \delta \dot{q}_i + \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i \right)$$

integrando p/ partes: $\int p_i \delta \dot{q}_i dt = - \int \dot{p}_i \delta q_i + p_i \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2}$

$$\therefore 0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left[-\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \right] \delta q_i + \left[\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right] \delta p_i$$



$\therefore$ como δq_i 's, δp_i 's arbitrários e independentes:

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i; \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i}$$

Vale notar que nessa derivação não assumimos nada sobre $\delta p_i(t_1, t_2)$

Podemos obter um outro princípio variacional, que também leva às eqs. corretas mas tem uma forma mais simétrica em q, p (que será útil adiante) se restringimos as variações apenas às trajetórias p/ as quais também $\delta p_i(t_1) = \delta p_i(t_2) = 0$.

Nesse caso, integrando por partes $\int p_i \dot{q}_i dt = p_i q_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int q_i \dot{p}_i$, a eq. $\delta S = 0$ fica

$$0 = \delta \left[\int_{t_1}^{t_2} - \sum_i q_i \dot{p}_i - H dt \right] + \sum_i \delta(q_i \overset{0}{p}_i(t_2)) - \delta(q_i \overset{0}{p}_i(t_1))$$

e portanto

$$0 = \delta \left[\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \frac{p_i \dot{q}_i - q_i \dot{p}_i}{2} - H dt \right]$$

Conclusão: obtemos as eqs. de Hamilton se impusermos o princípio de que a qtd $\tilde{S} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \sum_i (p_i \dot{q}_i - q_i \dot{p}_i) - H dt$ tem variação nula sobre todas as trajetórias com mesmos ponto inicial e final no espaço de fase.

Oie, a trajetória física é aquela p/ a qual $\tilde{S}$ é "mínima" (mais geralmente, estacionária)

